



**OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ**  
**Etapa locală**  
**15 februarie 2015**

**Clasa a IX-a**

1. Pentru  $x, y \in \mathbf{R}$  cu proprietatea că  $2x + y = 10$  se consideră expresia:

$$E(x, y) = \frac{[x + y] + [x + 2y] + \dots + [x + 404y]}{404},$$

unde  $[a]$  reprezintă partea întreagă a numărului real  $a$ . Arătați că:

$$[404(x + y) - E(x, y)] = 2015.$$

2. Să se determine  $n \in \mathbf{N}$  astfel încât  $\sqrt{n^2 - 89n + 2011} \in \mathbf{N}$ .

3. Să se determine o progresie aritmetică în care suma primilor  $n$  termeni este egală cu  $3n^2 + 4n$ ,  $\forall n \in \mathbf{N}$ . Unii termeni ai progresiei sunt pătrate perfecte. Să se determine o expresie generală a acestor termeni și să se calculeze primii 6 termeni.

4. Fie patrulaterul  $ABCD$ ,  $H_1$  ortocentrul triunghiului  $ABC$  și  $H_2$  ortocentrul triunghiului  $DBC$ . Demonstrați că  $ABCD$  este inscriptibil dacă și numai dacă  $H_1H_2 \parallel AD$ .

**Notă:**

*Toate subiectele sunt obligatorii.*

*Fiecare problemă se va nota cu puncte între 1 și 10 (1 punct din oficiu)*

*Timp de lucru: 3 ore*

## Soluții clasa a IX-a:

1. Din definiția părții întregi avem:

$$x + y - 1 < [x + y] \leq x + y, \dots, x + 404y - 1 < [x + 404y] \leq x + 404y.$$

Adunăm membru cu membru inegalitățile de mai sus și obținem:

$$404x + 202 \cdot 405y - 404 < 404 \cdot E(x, y) \leq 404x + 202 \cdot 405y.$$

Atunci:  $-x - \frac{405y}{2} \leq -E(x, y) < -x - \frac{405y}{2} + 1$ . Rezultă:

$$403x + \frac{403y}{2} \leq 404(x + y) - E(x, y) < 403x + \frac{403y}{2} + 1$$

și ținând cont că  $2x + y = 10$ , obținem:

$$2015 \leq 404(x + y) - E(x, y) < 2016.$$

Din inegalitățile de mai sus, rezultă:  $[404(x + y) - E(x, y)] = 2015$ .

2. Dacă  $\sqrt{n^2 - 89n + 2011} \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$  astfel încât

$$\sqrt{n^2 - 89n + 2011} = k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n^2 - 89n + 2011 = k^2 \Rightarrow 4n^2 - 4 \cdot 89n + 8044 = 4k^2 \Rightarrow$$

$$(2n - 89)^2 + 123 = 4k^2 \Rightarrow (2k - 2n + 89)(2k + 2n - 89) = 123.$$

Distingem următoarele cazuri :

$$\text{Cazul I: } \begin{cases} 2k - 2n + 89 = 1 \\ 2k + 2n - 89 = 123 \end{cases} \Rightarrow k = 31 \text{ și } n = 75;$$

$$\text{Cazul II: } \begin{cases} 2k - 2n + 89 = 123 \\ 2k + 2n - 89 = 1 \end{cases} \Rightarrow k = 31 \text{ și } n = 14;$$

$$\text{Cazul III: } \begin{cases} 2k - 2n + 89 = 3 \\ 2k + 2n - 89 = 41 \end{cases} \Rightarrow k = 11 \text{ și } n = 54;$$

$$\text{Cazul IV: } \begin{cases} 2k - 2n + 89 = 41 \\ 2k + 2n - 89 = 3 \end{cases} \Rightarrow k = 11 \text{ și } n = 35$$

Deci valorile lui  $n$  căutate sunt 14, 35, 54, 75.

$$3. S_n = \frac{n}{2} [2a_1 + (n-1)r] = 3n^2 + 4n; \quad (1)$$

$$(r-6)n + 2a_1 - r - 8 = 0, \forall n \in \mathbb{N}. \quad (2)$$

De aici rezultă că  $r = 6$  și  $a_1 = 7$ .

Termenul general al șirului este de forma  $a_n = 6n + 1$ . Primii șase termeni ai șirului sunt 7, 13, 19, 25, 31, 37.

Observăm că toți termenii progresiei sunt numere impare. Condiția ca unii termeni ai progresiei să fie pătrate perfecte se scrie:

$$6n + 1 = (2k + 1)^2, \text{ de unde } 3n = 2k(k + 1). \quad (3)$$

Cum numerele  $k$  și  $(k + 1)$  sunt prime între ele, relația (3) are loc dacă  $k = 3p$ , de unde  $n = 2p(3p + 1)$ , sau  $k + 1 = 3p$ , adică  $n = 2p(3p - 1)$ ,  $p \geq 1$ .

Soluția problemei este deci  $n = 2p(3p \pm 1)$ ,  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**4.** Fie  $O_1, O_2$  centrele cercurilor circumscrise triunghiurilor  $ABC, DBC$ .

$AH_1BC$  și  $DH_2BC \Rightarrow AH_1 \parallel DH_2$ .

Ținând cont de aceasta,  $H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow AH_1H_2D$  paralelogram  $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{H_1H_2}$ .

$\overrightarrow{H_1H_2} = \overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{H_1}}$ ;

$H_2$  ortocentrul triunghiului  $BCD$  atunci:

$\overrightarrow{O_2H_2} = \overrightarrow{O_2B} + \overrightarrow{O_2C} + \overrightarrow{O_2D}$  (Relația lui Sylvester),

$$\overrightarrow{r_{H_2}} - \overrightarrow{r_{O_2}} = \overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_C} - \overrightarrow{r_{O_2}} + \overrightarrow{r_D} - \overrightarrow{r_{O_2}} \Rightarrow \overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}}$$

Analog:  $\overrightarrow{r_{H_1}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} - 2\overrightarrow{r_{O_1}}$ .

Deci,  $H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}} - (\overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_A} - 2\overrightarrow{r_{O_1}}) = \overrightarrow{AD} - 2(\overrightarrow{r_{O_2}} - \overrightarrow{r_{O_1}}) \Rightarrow O_2 = O_1 \Rightarrow ABCD$  inscriptibil.

## Barem de corectare

### Clasa a IX-a

<b>Problema 1</b>	<b>Oficiu 1 p</b>
$x + y - 1 < [x + y] \leq x + y, \dots, x + 404y - 1 < [x + 404y]$	2p
$\leq x + 404y.$	
$404x + 202 \cdot 405y - 404 < 404 \cdot E(x, y) \leq$	2p
$\leq 404x + 202 \cdot 405y$	
$-x - \frac{405y}{2} \leq -E(x, y) < -x - \frac{405y}{2} + 1$	1p
$403x + \frac{403y}{2} \leq 404(x + y) - E(x, y) < 403x + \frac{403y}{2} + 1$	1p
$2015 \leq 404(x + y) - E(x, y) < 2016$	2p
Finalizare	1p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>

<b>Problema 2</b>	<b>Oficiu 1 p</b>
$\exists k \in \mathbb{N}$ astfel încât $\sqrt{n^2 - 89n + 2011} = k$	2p
$4n^2 - 4 \cdot 89n + 8044 = 4k^2$	1p
$(2k - 2n + 89)(2k + 2n - 89) = 123$	1p
Cazul I	1p
Cazul II	1p
Cazul III	1p
Cazul IV	1p
Finalizare	1p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>

<b>Problema 3</b>	<b>Oficiu 1 p</b>
$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n - 1)r] = 3n^2 + 4n$	2p
$(r - 6)n + 2a_1 - r - 8 = 0$	1p
$r = 6$ și $a_1 = 7$	1p
$a_n = 6n + 1$	1p
7, 13, 19, 25, 31, 37	
Condiția $6n + 1 = (2k + 1)^2$	1p
Finalizare	2p
<b>TOTAL</b>	<b>10p</b>

<b>Problema 4</b>	<b>Oficiu</b>	<b>1 p</b>
$AH_1BC$ și $DH_2BC \Rightarrow AH_1 \parallel DH_2$		1p
$H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow AH_1H_2D$ paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{H_1H_2}$ .		1p
$\overrightarrow{r_{H_2}} = \overrightarrow{r_B} + \overrightarrow{r_C} + \overrightarrow{r_D} - 2\overrightarrow{r_{O_2}}$		3p
$H_1H_2 \parallel AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD} - 2(\overrightarrow{r_{O_2}} - \overrightarrow{r_{O_1}})$		2p
Finalizare		2p
<b>TOTAL</b>		<b>10p</b>